

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 1

1. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Mengen:

✓ (i) $A \Delta \emptyset = A$

✓ (ii) $A \Delta A = \emptyset$

✓ (iii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

✓ (iv) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

(v) $(A_1 \setminus B_1) \cap \dots \cap (A_n \setminus B_n) = (A_1 \cap \dots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$

(vi) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(vii) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap D) \setminus B)$

2. Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf X . Zeigen Sie, dass die minimalen nichtleeren Teilmengen in $\mathcal{R}$ paarweise disjunkt sind und dass $\mathcal{R}$ genau aus den Teilmengen besteht, die Vereinigungen einiger dieser minimalen Teilmengen sind.

3. (i) Die von einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ besteht aus den Teilmengen des Rings und deren Komplementen.

(ii) Ein Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ enthält das Komplement entweder von jeder seiner Teilmengen oder von keiner von ihnen. Im ersten Fall ist er eine Algebra.

4. Eine nichtleere Familie $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein *Ideal* des Rings $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ im Sinne der Algebra (Ringtheorie) genau dann, wenn $\mathcal{I}$ als Familie von Teilmengen $\cup$ -stabil ist und mit jeder Teilmenge auch alle Teilmengen von ihr enthält.

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 27.10.2023 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B1_Name1_Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

1. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Mengen:

$$(i) A \Delta \emptyset = A$$

$$(ii) A \Delta A = \emptyset$$

$$(iii) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

$$(iv) (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

$$(v) (A_1 \setminus B_1) \cap \dots \cap (A_n \setminus B_n) = (A_1 \cap \dots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$$

$$(vi) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$(vii) (A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap D) \setminus B)$$

neutr. E. bzgl. +

$$(i) A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$$

$$(ii) A \Delta A = \underbrace{(A \setminus A)}_{\emptyset} \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$(iii) A \Delta B = (A \setminus B) \cup (A^c \cap B)$$

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \Delta C &= ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C^c \cup ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))^c \cap C \\ &= (A \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c \\ &= (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (B \cap A \cap C) \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck invariant ist unter Permutation von A, B und C folgt

$$(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$$

$$\chi_{(A \Delta B) \Delta C} = \chi_{A \Delta B} + \chi_C = \chi_A + \chi_B + \chi_C = \chi_A + \chi_{B \Delta C}$$

$$\begin{aligned} (iv) (A \cap C) \Delta (B \cap C) &= (A \cap C) \cap \underbrace{(B \cap C)^c}_{B^c \cup C^c} \cup (B \cap C) \cap \underbrace{(A \cap C)^c}_{A^c \cup C^c} \\ &= (A \cap C \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c) = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C = (A \Delta B) \cap C \end{aligned}$$

$$\chi_{(A \Delta B) \cap C} = \chi_{A \Delta B} \chi_C = (\chi_A + \chi_B) \chi_C = \chi_A \chi_C + \chi_B \chi_C = \chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)}$$

$$\begin{aligned} (v) (A_1 \setminus B_1) \cap \dots \cap (A_n \setminus B_n) &= A_1 \cap B_1^c \cap \dots \cap A_n \cap B_n^c = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)^c \\ &= (A_1 \cap \dots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n) \end{aligned}$$

$$(vi) A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} (vii) (A \setminus B) \setminus (C \setminus D) &= \underbrace{(A \setminus B) \setminus C}_{A \cap B^c \cap C^c} \cup \underbrace{(A \setminus B) \cap D}_{A \cap B^c \cap D} \\ &= \underbrace{(B \cup C)^c}_{(B \cup C)^c} \cap D = (A \cap D) \setminus B \\ &= A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

Lösung

2. Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf X . Zeigen Sie, dass die minimalen nichtleeren Teilmengen in $\mathcal{R}$ paarweise disjunkt sind und dass $\mathcal{R}$ genau aus den Vereinigungen einiger dieser minimalen Teilmengen sind.

Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ minimale nichtleere Mengen in dem Ring.

Mit $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}$ und $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ folgt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ oder $A_1 \cap A_2 = A_1$.

In letzterem Fall folgt $A_1 \subseteq A_2$ und damit $A_1 = A_2$ aufgrund der Minimalität von A_2 .

Sei nun X endlich. Wir zeigen mit Induktion "Menge der Kardinalität $\leq n$ in $\mathcal{R}$ sind disj. Verein einiger dieser minimalen nichtleeren Mengen" für $n \in \mathbb{N}$.

Für $n=1$: klar

$n \rightarrow n+1$. Sei $A \in \mathcal{R}$ mit $|A| = n+1$. Sei $A' \subseteq A$, $A' \in \mathcal{R}$ minimale nichtl. Menge

$A \setminus A' \in \mathcal{R}$ ist entweder leer oder gleich $\bigcup_{i=1}^n A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$ min. nichtleer. In erstem Fall ist A minimal, in dem zweiten Fall ist $A = A' \cup \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine solche Vereinigung.

3. (i) Die von einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ besteht aus den Teilmengen des Rings und deren Komplementen.
- (ii) Ein Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ enthält das Komplement entweder von jeder seiner Teilmengen oder von keiner von ihnen. Im ersten Fall ist er eine Algebra.

Lösung

Sei $\mathcal{A}' = \{A, A^c : A \in \mathcal{R}\}$. Genügt z.z., dass $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ $\cap$ -stabil und $\cup$ -stabil. $\emptyset \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ und $\cap$ -Stabilität von $\mathcal{A}'$ klar.

$$A \cup B^c = \underbrace{(A^c \cap B)^c}_{\in \mathcal{R}} \in \mathcal{A}'$$

$$A^c \cup B^c = \underbrace{(A \cap B)^c}_{\in \mathcal{R}} \in \mathcal{A}'$$

$\Rightarrow \mathcal{A}'$ ist Algebra. Jede Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält, enthält notwendigerweise $\mathcal{A}'$, da sie unter Komplementen stabil ist.

Also ist $\mathcal{A}'$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte Algebra.

(ii) Falls $A, A^c \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup A^c = X \in \mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ $\cap$ -stabil, folgt $B^c = X \setminus B \in \mathcal{R}$ für jede TM $B \in \mathcal{R}$. Also ist in diesem Fall $\mathcal{R} = \{A, A^c : A \in \mathcal{R}\}$ und $\mathcal{R}$ eine Algebra nach (i).

Lösung

4. Eine nichtleere Familie $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein *Ideal* des Rings $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ im Sinne der Algebra (Ringtheorie) genau dann, wenn $\mathcal{I}$ als Familie von Teilmengen $\cup$ -stabil ist und mit jeder Teilmenge auch alle Teilmengen von ihr enthält.

Eine TM $\emptyset \subseteq R$ heißt *Ideal*, falls $(\emptyset, +) \subseteq (R, +)$ eine additive un. und

$$R \cap \emptyset = \{r \cdot a : r \in R, a \in \emptyset\} \subseteq \emptyset$$

per Def ist $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ideal gdw $\emptyset \in \mathcal{I}$, $(A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I})$ $R \cap A \in \mathcal{I} \forall A \in \mathcal{I}, R \in \mathcal{P}(X)$

Die Bedingung (c) ist äquiv dazu, dass $\mathcal{I}$ mit einer Menge auch all ihre TM enthält und, da $\mathcal{I}$ nichtleer, folgt aus dieser äquiv Bed $\emptyset \in \mathcal{I}$

$$\text{"} \Rightarrow \text{" } A, B \in \mathcal{I}. \text{ Dann ist } A \cup B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in \mathcal{I}} \Delta \underbrace{(A \cap B)}_{\substack{\subseteq A \\ \subseteq B \\ \in \mathcal{I}}} \in \mathcal{I}$$

$$\text{"} \Leftarrow \text{" } A, B \in \mathcal{I}. \text{ Dann ist } A \cap B = \underbrace{(A \cap B)}_{\substack{\subseteq A \\ \subseteq B \\ \in \mathcal{I}}} \cup \underbrace{(B \cap A)}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{I}$$